

# Изучение силы трения (Решение)

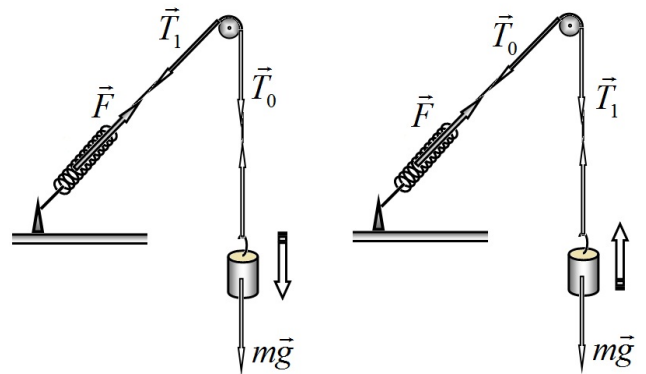
## Часть 1. Трение на цилиндрическом стержне

1.1 При движении груза вниз в момент остановки выполняются соотношения между силами

$$\begin{cases} T_0 = mg \\ T_1 = \gamma T_0 \\ T_1 = k\Delta x_1 \end{cases} \Rightarrow k\Delta x_1 = \gamma mg.$$

Из этих уравнений следует

$$x_2 = l_0 + \gamma \frac{mg}{k}. \quad (1)$$



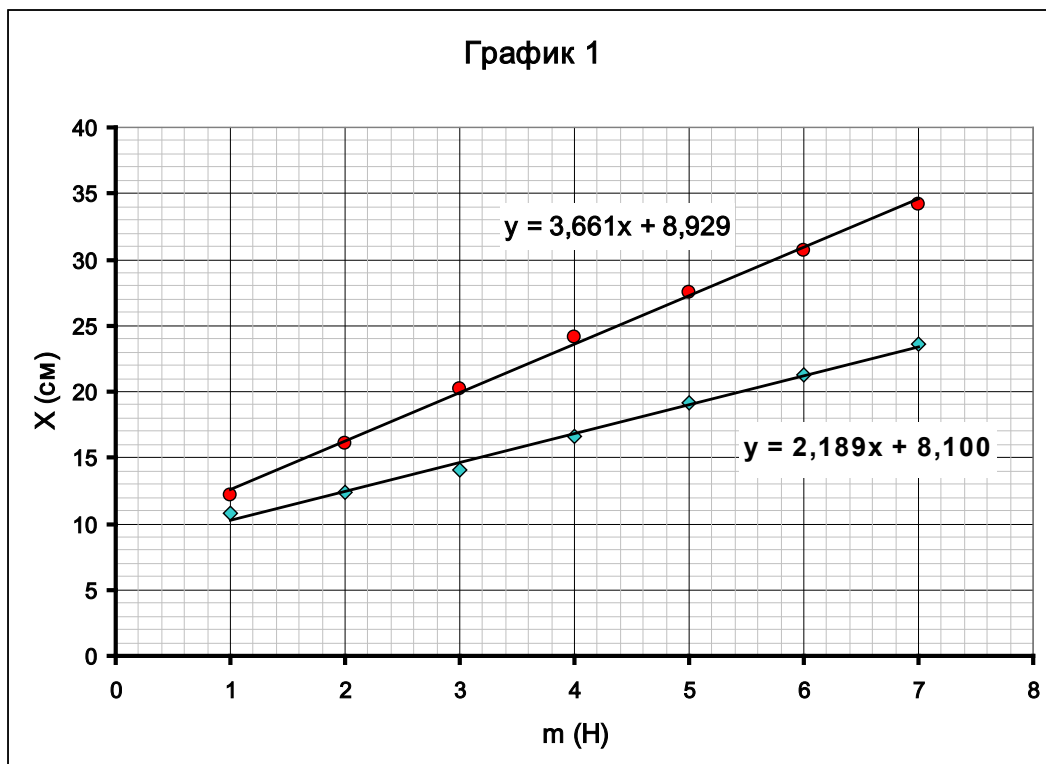
При движении груза вверх имеем уравнения

$$\begin{cases} T_1 = mg \\ T_1 = \gamma T_0 \\ T_0 = k\Delta x_1 \end{cases} \Rightarrow \gamma k\Delta x_1 = \gamma mg,$$

Из которых следует, что

$$x_1 = l_0 + \frac{mg}{\gamma k}. \quad (2)$$

1.2 Требуемые графики экспериментальных зависимостей длин пружины  $x_1$  и  $x_2$  от числа подвешенных грузов  $n$  показаны на рисунке



1.3 Расчет коэффициентов и их погрешностей по методу наименьших квадратов проводится по формулам:

$$Y_i = aX_i + b$$

Расчет коэффициентов:

- средние значения, которые определяют центр экспериментальных точек:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum X_i}{N}; \quad \langle Y \rangle = \frac{\sum Y_i}{N};$$

- дисперсии (средний квадрат минус квадрат среднего),

$$S_X^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \langle X \rangle^2; \quad S_Y^2 = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \langle Y \rangle^2;$$

- коэффициент ковариации (среднее произведение минус произведение средних):

$$R_{XY} = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle;$$

- коэффициенты:

$$a = \frac{R_{XY}}{S_X^2}; \quad b = \langle Y \rangle - a \langle X \rangle;$$

- погрешности коэффициентов:

$$\Delta a = t_{N-1,p} \sqrt{\frac{1}{N-2} \left( \frac{S_Y^2}{S_X^2} - a^2 \right)} \quad \Delta b = \Delta a \sqrt{S_X^2 + \langle X \rangle^2}$$

Результаты расчетов коэффициентов построенных зависимостей оказались равными

$$\begin{aligned} a_1 &= (3,66 \pm 0,15) \text{ см}, \quad \varepsilon_a = 0,04 \\ b_1 &= (8,9 \pm 0,7) \text{ см}, \quad \varepsilon_b = 0,07 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (2,19 \pm 0,14) \text{ см}, \quad \varepsilon_a = 0,06 \\ b_2 &= (8,1 \pm 0,6) \text{ см}, \quad \varepsilon_b = 0,08 \end{aligned} \quad (4)$$

1.4. Перепишем теоретические формулы так, чтобы выразить значение найденных коэффициентов

$$\begin{aligned} x_1 &= l_0 + \frac{mg}{\gamma k} = l_0 + \frac{m_{et}g}{\gamma k} n \\ x_2 &= l_0 + \gamma \frac{mg}{k} = l_0 + \gamma \frac{m_{et}g}{k} n \end{aligned} \quad (5)$$

Из этих формул следует, что коэффициенты экспериментальных зависимостей выражаются через параметры установки следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = l_0 \\ a_1 &= \frac{m_{et}g}{\gamma k} \\ a_2 &= \gamma \frac{m_{et}g}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью этих формул можно рассчитать значения параметров установки.

Длина пружины в недеформированном состоянии: примерно равна

$$l_0 \approx b_1 \approx b_2. \quad (7)$$

Заметим, что экспериментальные значения этих параметров совпадают в пределах погрешности. Для повышения точности результата следует взять среднее значение между ними

$$\langle l_0 \rangle = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = 8,5 \text{ см}. \quad (8)$$

Тогда погрешность этого значения равна

$$\Delta l_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2} \approx 0,5 \text{ см}. \quad (9)$$

Окончательно

$$\boxed{\langle l_0 \rangle = (8,5 \pm 0,5) \text{ см}} \quad (10)$$

Жесткость пружины рассчитывается по формуле

$$\begin{cases} a_1 = \frac{m_{et} g}{\gamma k} \\ a_2 = \gamma \frac{m_{et} g}{k} \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = \left( \frac{m_{et} g}{k} \right)^2 \Rightarrow k = \frac{m_{et} g}{\sqrt{a_1 \cdot a_2}} \quad (11)$$

Подстановка численных данных в системе СИ приводит к результату

$$\bar{k} = \frac{m_{et} g}{\sqrt{a_1 \cdot a_2}} = \frac{0,100 \cdot 9,81}{\sqrt{3,66 \cdot 2,19 \cdot 10^{-2}}} = 34,65 \frac{H}{м}.$$

Погрешность найденного значения рассчитывается по формуле

$$\Delta k = \frac{\bar{k}}{2} \sqrt{(\varepsilon_{a1})^2 + (\varepsilon_{a2})^2} = 1,3 \frac{H}{м}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\boxed{\bar{k} = (34,7 \pm 1,3) \frac{H}{м}}. \quad (12)$$

Коэффициент уменьшения силы натяжения нити можно рассчитать по формуле

$$\begin{cases} a_1 = \frac{m_{et} g}{\gamma k} \\ a_2 = \gamma \frac{m_{et} g}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \gamma^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}. \quad (13)$$

Численное значение этого коэффициента

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = 0,773,$$

А его погрешность

$$\Delta \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{2} \sqrt{(\varepsilon_{a1})^2 + (\varepsilon_{a2})^2} = 0,03. \quad (14)$$

Окончательно значение

$$\boxed{\bar{\gamma} = 0,77 \pm 0,03}. \quad (15)$$

Коэффициент трения нити о стрежень можно найти с помощью формулы Эйлера

$$\gamma = \exp(-\mu \alpha) \Rightarrow \mu = -\frac{\ln \gamma}{\alpha} \quad (15)$$

При вертикальном расположении нити (1) угол охвата стержня равен  $\alpha = \pi$ . С учетом этого значения получаем:

$$\bar{\mu} = -\frac{\ln \bar{\gamma}}{\pi} = 0,0818. \quad (20)$$

Погрешность найденного значения коэффициента трения необходимо рассчитывать по формуле

$$\Delta \bar{\mu} = \frac{\Delta \bar{\gamma}}{\pi \bar{\gamma}} = 0,012. \quad (21)$$

Окончательно

$$\boxed{\bar{\mu} = 0,082 \pm 0,012}. \quad (20)$$

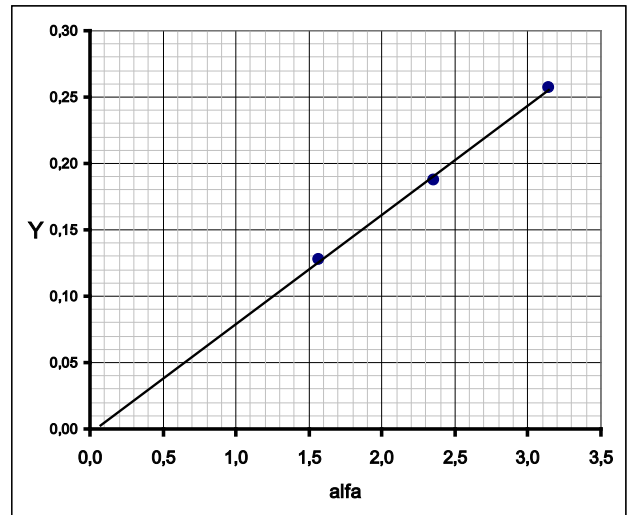
1.5. При горизонтальном расположении нити  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ , если нить расположена под углом  $\varphi = 45^\circ$  к горизонту, то  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ . Расчет коэффициентов  $\gamma$  и  $\mu$  может быть проведен по формулам (13) и (15). Представим результаты расчетов в таблице.

| Положение нити | $\alpha$ | $a_1$ , см | $a_2$ , см | $\gamma$ | $-\ln \gamma$ | $\mu$  |
|----------------|----------|------------|------------|----------|---------------|--------|
| Горизонтально  | 1,571    | 3,264      | 2,529      | 0,880    | 0,128         | 0,0812 |
| Под углом      | 2,356    | 3,414      | 2,346      | 0,829    | 0,188         | 0,0796 |
| Вертикально    | 3,142    | 3,661      | 2,189      | 0,773    | 0,257         | 0,0819 |

1.6. Для проверки применимости формулы Эйлера можно представить ее в полулогарифмическом масштабе:

$$-\ln \gamma = \mu \alpha \quad (20)$$

Если эта формула применима, то зависимость величины  $Y = -\ln \gamma$  от угла  $\alpha$  должна быть линейной и ее график проходить через начало координат. На рисунке показан график этой зависимости, который подтверждает, что в данном случае формула Эйлера выполняется.



1.7. Чтобы уточнить значение коэффициента трения можно вычислить среднее арифметическое значение от трех значений, рассчитанных при разных положениях нити.

$$\langle \mu \rangle = \frac{\mu_1 + \mu_3 + \mu_2}{3} = 0,0809.$$

Погрешность этого значения равна

$$\Delta \langle \mu \rangle = \frac{\Delta \bar{\mu}}{\sqrt{3}} = 0,007$$

Поэтому окончательно значение коэффициента трения следует принять равным

$$\boxed{\langle \mu \rangle = 0,081 \pm 0,007}.$$

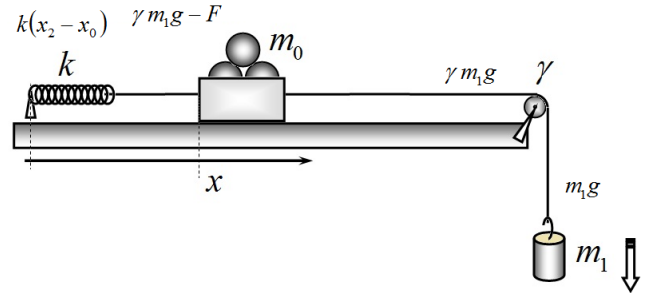
## Часть 2. Трение скольжения на горизонтальной поверхности.

2.1. Из приведенных графиков видно, что коробка начинает сдвигаться не сразу, а только если масса подвешенных грузов превышает некоторое определенное значение. До этого координата коробки равна  $x_0 = 44,0 \text{ см}$ , что и является ответом на вопрос в данном пункте задачи.

2.2. Не сложно записать условия равновесия всех тел в данной установке и получить формулы для измеряемых координат границ зоны застоя.

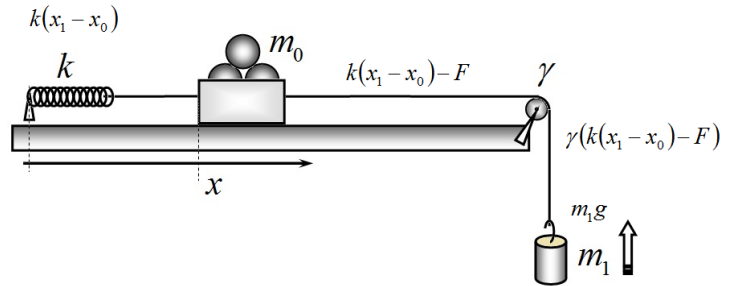
При медленном смещении подвешенных грузов вниз можно записать (см. рис. на котором указаны силы натяжения нитей в системе)

$$\begin{aligned} k(x_2 - x_0) &= \gamma m_1 g - F \Rightarrow \\ x_2 &= x_0 + \frac{\gamma m_1 g - F}{k} \end{aligned} \quad (21)$$



При медленном смещении подвешенных грузов вверх аналогичные выкладки приводят к результату

$$\begin{aligned} \gamma(k(x_1 - x_0) - F) &= m_1 g \Rightarrow \\ x_1 &= x_0 + \frac{\frac{m_1 g}{\gamma} + F}{k} \end{aligned} \quad (22)$$



2.3. Получим формулы для расчета требуемых параметров установки, через измеряемые величины (коэффициенты линейных зависимостей). Для этого перепишем теоретические формулы с учетом того, что масса подвешенных грузов определяется их числом  $m_1 = m_{et} n_1$ . Тогда для левой границы зоны застоя получим

$$x_2 = x_0 + \frac{\gamma m_1 g - F}{k} = \frac{\gamma m_{et} g}{k} n_1 + x_0 - \frac{F}{k}. \quad (23)$$

Сравнивая с формулой, описывающей экспериментальную зависимость,

$$x_2 = a_2 n_1 + b_2$$

Получаем, что коэффициенты этой зависимости равны

$$a_2 = \frac{\gamma m_{et} g}{k}, \quad b_2 = x_0 - \frac{F}{k} \quad (24)$$

Аналогично для правой границы зоны застоя:

$$x_1 = \frac{m_{et} g}{\gamma k} n_1 + \left( x_0 + \frac{F}{k} \right) = a_1 n_1 + b_1,$$

Откуда следует, что

$$a_1 = \frac{m_{et} g}{\gamma k}, \quad b_1 = \left( x_0 + \frac{F}{k} \right) \quad (25)$$

Теперь не сложно получить, что параметры установки могут быть найдены с помощью коэффициентов экспериментальных зависимостей, как

$$k = \frac{m_{et} g}{\sqrt{a_1 \cdot a_2}} \quad (26)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}. \quad (27)$$

$$F = \frac{b_1 - b_2}{2} k. \quad (28)$$

2.3. Результаты расчетов по эти формула приведены в следующей таблице.

Таблица п.2.3.

| $n_0$ | $a_1$ см | $b_1$ см | $a_2$ см | $b_2$ см | $\gamma$ | $k, \frac{H}{м}$ | $F, Н$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------|--------|
| 2     | 3,032    | 44,471   | 2,769    | 39,625   | 0,956    | 33,9             | 0,834  |
| 3     | 3,007    | 45,743   | 2,723    | 38,754   | 0,952    | 34,3             | 1,203  |
| 4     | 3,050    | 46,529   | 2,780    | 37,500   | 0,955    | 33,7             | 1,554  |
| 5     | 3,096    | 47,314   | 2,820    | 36,380   | 0,954    | 33,2             | 1,881  |
| 6     | 3,082    | 48,339   | 2,740    | 35,370   | 0,943    | 33,8             | 2,231  |

2.4 Для определения параметров  $\gamma$  и  $k$  с максимальной точность необходимо просто вычислить их средние арифметические значения по всем полученным результатам:

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle &= 0,95 \\ \langle k \rangle &= 33,8 \frac{H}{м} \end{aligned} \quad (29)$$

2.5 Для расчета силы трения необходимо воспользоваться формулой (28), а численное значение коэффициента упругости пружины считать равным его среднему значению (29). Результаты таких расчетов приведены в последнем столбце Таблицы п. 2.3. График полученной зависимости приведен на рисунке.



2.6. Полученная зависимость является линейной  $F = an_0 + b$ . Коэффициенты этой зависимости, рассчитанные по МНК равны

$$\begin{aligned} a &= 0,341 H \\ b &= 0,148 \end{aligned} \quad (30)$$

Теоретически зависимость силы трения от числа грузов в коробке определяется законом Кулона – Амонтона

$$F = \mu(m_{et}n_0 + m_b)g. \quad (31)$$

Из этих формул следует, что коэффициент трения коробки о поверхность равен

$$\mu = \frac{a}{m_{et}g} \approx 0,35. \quad (32)$$

А масса коробки

$$m_b = \frac{b}{\mu g} \approx 43 \text{ г}. \quad (33)$$